

Clasa a V-a

Problema 1: Determinați numerele naturale x și y pentru care $x^{y-3} + x = 2019$.

Daniel Stretcu, Drobeta Turnu Severin, GM 12

Soluție: Dacă $y - 3 \neq 0$, atunci numerele x^{y-3} și x au aceeași paritate, deci $x^{y-3} + x$ este număr par. Dar 2019 este număr impar. Rezultă $y - 3 = 0$, adică $y = 3$.
Relația dată devine $1 + x = 2019$, de unde $x = 2018$.

Problema 2. Determinați cifrele $a \geq 2$ și b pentru care $10^a - 100 = \overline{ab}^2$.

Soluție Cum $a \geq 2$ avem ultima cifră a lui $10^a - 100$ este 0, deci ultima cifră a lui $\overline{ab}^2$ este 0, deci $b = 0$.
Deoarece $\overline{ab} \leq 99$ avem $\overline{ab}^2 \leq 99^2 < 100^2 = 10^4$. De aici și din $\overline{ab}^2 = 10^a - 100$ rezultă $10^a - 100 < 10^4$, adică $a \leq 4$. Dacă $a \geq 5$, atunci $10^5 - 100 = 99900 > 10000$.
Verifică numai $a = 3$.

Problema 3. Într-o urnă sunt 400 de bile albe, verzi și roșii. Pe fiecare bilă este scris un număr de două cifre. Cifra zecilor este totdeauna o cifră pară, iar cifra unităților este totdeauna o cifră impară. Care este cel mai mic număr de bile pe care trebuie să îl extragem din urnă, fără a le privi, pentru a fi siguri că am extras două bile identice (au aceeași culoare și același număr scris pe ele)

Soluție Trebuie să vedem câte bile diferite avem.

Numărul de numere care se pot forma în condițiile din problemă este egal cu

$$4 \cdot 5 = 20$$

(sunt 4 posibilități de a alege cifra zecilor (2,4,6,8) și 5 posibilități de a alege cifra unităților (1,3,5,7,9))

Numărul de bile diferite este egal cu

$$3 \cdot 20 = 60$$

(avem 3 posibilități de a alege culoarea și 20 de posibilități de a scrie pe ele un număr).

Înseamnă că dacă vom extrage 61 de bile vom avea cu siguranță două bile identice.

Problema 4. Scriem numerele naturale mai mici decât 1000 și le colorăm cu roșu sau cu albastru. Dacă un număr n este roșu, atunci și numărul $n + 4$ este tot roșu, iar dacă un număr p este albastru, atunci și numărul $p + 6$ este tot albastru. Arătați că toate numerele pare sunt colorate la fel.

Soluție Trebuie arătat că numerele pare consecutive, n și $n + 2$ sunt colorate la fel. Presupunem că numerele n și $n + 2$ sunt colorate diferit.

I. n este roșu și $n + 2$ este albastru.

Dacă n este roșu, atunci din ipoteză, $n + 4$ este roșu și mai mult $n + 8$ este roșu.

Dacă $n + 2$ este albastru, atunci din ipoteză, $n + 2 + 6$, adică $n + 8$ este albastru.

Cum fiecare număr are o singură culoare deducem că această posibilitate este exclusă.

II. n este albastru și $n + 2$ este roșu.

Dacă n este albastru, atunci din ipoteză, $n + 6$ este albastru.

Dacă $n + 2$ este roșu, atunci din ipoteză, $n + 2 + 4$, adică $n + 6$ este roșu.

Cum fiecare număr are o singură culoare deducem că și această posibilitate este exclusă.

În concluzie, n și $n + 2$ au aceeași culoare.

Cum n și $n + 2$ reprezintă două numere pare oarecare, rezultă că toate numerele pare au aceeași culoare.

Clasa a VI-a

Problema 1 Fie n un număr natural. Calculați cmmdc și cmmmc pentru numerele a și b , unde:

$$a = 2^{2n+4} \cdot 5^n + 20^{n+1} - 4^n \cdot 5^n$$

$$b = 2^{n+4} \cdot 5^n + 10^{n+1} + 2^{n+1} \cdot 5^n$$

Soluție: Descompunem în produs de factori primi numerele a și b folosind proprietățile puterilor și factorul comun.

Avem

$$a = 2^{2n+4} \cdot 5^n + (2^2 \cdot 5)^{n+1} - 2^{2n} \cdot 5^n = 2^{2n+4} \cdot 5^n + 2^{2n+2} \cdot 5^{n+1} - 2^{2n} \cdot 5^n = 2^{2n} \cdot 5^n \cdot (2^4 + 2^2 \cdot 5 - 1) = 2^{2n} \cdot 5^n \cdot 35 = 2^{2n} \cdot 5^{n+1} \cdot 7. \quad (2p)$$

și

$$b = 2^{n+4} \cdot 5^n + (2 \cdot 5)^{n+1} + 2^{n+1} \cdot 5^n = 2^{n+4} \cdot 5^n + 2^{n+1} \cdot 5^{n+1} + 2^{n+1} \cdot 5^n = 2^{n+1} \cdot 5^n \cdot (2^3 + 5 + 1) = 2^{n+1} \cdot 5^n \cdot 14 = 2^{n+2} \cdot 5^n \cdot 7. \quad (2p)$$

Așadar

$$a = 2^{2n} \cdot 5^{n+1} \cdot 7$$

$$b = 2^{n+2} \cdot 5^n \cdot 7$$

și atunci :

Pentru $2n \geq n+2$, adică $n \geq 2$, avem

$$\text{cmmdc} = 2^{n+2} \cdot 5^n \cdot 7 \text{ și } \text{cmmmc} = 2^{2n} \cdot 5^{n+1} \cdot 7; \quad (1p)$$

Pentru $n=1$ rezultă

$$a = 2^2 \cdot 5^2 \cdot 7$$

$$b = 2^3 \cdot 5 \cdot 7$$

și avem

$$\text{cmmdc} = 2^2 \cdot 5 \cdot 7 \text{ și } \text{cmmmc} = 2^3 \cdot 5^2 \cdot 7; \quad (1p)$$

Pentru $n=0$ rezultă

$$a = 5 \cdot 7$$

$$b = 2^2 \cdot 7$$

și avem

$$\text{cmmdc} = 7 \text{ și } \text{cmmmc} = 2^2 \cdot 5 \cdot 7; \quad (1p)$$

Problema 2: Patru numere consecutive se împart succesiv la același număr natural de trei cifre. Suma resturilor obținute este egală cu 983. Calculați restul împărțirii celui mai mic dintre cele patru numere la 109.

Dan Nedecianu, Drobeta Turnu Severin, GM 9

Soluție: Fie $n, n+1, n+2, n+3$ cele patru numere și a împărțitorul de trei cifre.

Avem $n = ac_1 + r_1, n+1 = ac_2 + r_2, n+2 = ac_3 + r_3$ și $n+3 = ac_4 + r_4. \quad (1p)$

Dacă numerele sunt consecutive și se împart la același număr, atunci și resturile sunt consecutive. $(1p)$

Cele patru resturi pot fi:

$$1. r_1 = r, r_2 = r+1, r_3 = r+2, r_4 = r+3$$

$$2. r_1 = r, r_2 = r+1, r_3 = r+2, r_4 = 0$$

$$3. r_1 = r, r_2 = r+1, r_3 = 0, r_4 = 1$$

$$4. r_1 = r, r_2 = 0, r_3 = 1, r_4 = 2$$

Se știe că suma resturilor este 983.

În cazul 1 obținem $4r+6 = 983$; imposibil.

În cazul 2 obținem $3r+3 = 983$; imposibil.

În cazul 3 obținem $2r+2 = 983$; imposibil

În cazul 4 obținem $r+3 = 983$, de unde $r = 980$.

Acum $n = ac_1 + 980$, de unde $n+1 = ac_1 + 981$. Cum restul împărțirii lui $n+1$ la a este 0, rezultă $a = 981$ și atunci $n = 981c_1 + 980$.

Avem $n = 981c_1 + 980 = 109 \cdot 9c_1 + 109 \cdot 8 + 108 = 109(9c_1 + 8) + 108$.

Cum $108 < 109$ rezultă că restul împărțirii, celui mai mic dintre cele patru numere, la 109 este 108.

$$\text{Caz 1: } (1p)$$

$$\text{Caz 2: } (1p)$$

$$\text{Caz 3: } (1p)$$

$$\text{Caz 4: } (2p)$$

Problema 3. Fie numărul natural $A = \overline{abcdef}$ și numărul natural B care se obține schimbând arbitrar ordinea cifrelor numărului A . Este posibil ca diferența numerelor A și B să fie 2020? ***

Soluție: Știm că un număr natural și suma cifrelor sale dau la împărțirea cu 9 același rest. Indiferent cum schimbăm ordinea cifrelor, suma lor este aceeași. Astfel cele două numere dau același rest la împărțirea cu 9. Deci diferența lor va fi divizibilă cu 9. Cum 2020 nu se divide cu 9, rezultă că 2020 nu poate fi această diferență. 2p/

Problema 4. Se dau 13 numere naturale distincte, nenule, mai mici decât 64. Să se arate că se pot alege trei numere din cele date, fie acestea a, b, c cu $a < b < c$, astfel încât $a + b > c$.

Mihai Bunget, Târgu Jiu

Soluție: Se împart numerele de la 1 la 63 în următoarele mulțimi:

$$\{1\}, \{2, 3\}, \{4, 5, 6, 7\}, \{8, 9, 10, \dots, 15\} \\ \{16, 17, \dots, 31\}, \{32, 33, \dots, 63\}.$$

(3p)

Cum numărul mulțimilor este 6 iar al numerelor este 13, deducem că va exista o mulțime în care se vor afla cel puțin 3 dintre cele 13 numere.

Presupunând că am ales numerele 1, 2, 3 rămân 10 elemente pe care trebuie să le alegem din celelate 4 mulțimi. Așadar, tot vom avea 3 numere din aceeași mulțime. (2p)

Cum suma celor mai mici două elemente dintr-o mulțime este mai mare decât cel mai mare element al mulțimii, deducem că cele 3 elemente alese dintr-o mulțime vor verifica proprietatea cerută. (2p)